

TD N°1 D'Analyse Math2

Promotion: 1^{ère}ST

Intégrales

Exercice 1 Soit l'intégrale $I = \int_1^5 (1 - x^2) dx$.

1) Calculer l'intégrale I à l'aide des sommes de Riemann. (aide: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

2) Calculer l'intégrale I à l'aide d'une primitive.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes:

1) $\int_0^1 \arctan x dx$,

2) $\int e^x \cos x dx$

Exercice 3 A l'aide d'un changement de variable adéquat, calculer les intégrales suivantes:

(1) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}$, (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$, (3) $\int \frac{\arctan \frac{x}{2} dx}{4+x^2}$, (4) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$.

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes:

1) $\int \frac{x^3 dx}{x^3 + 2x^2 + x}$,

2) $\int \frac{dx}{2x^2 - 5x + 7}$,

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes:

• $\int \sin^{2019} x \cos^3 x dx$,

• $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$,

• $\int \sin 3x \cos 5x dx$,

• $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$,

• $\int \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x}$, ($a \in \mathbb{R}$).

Exercices supplémentaires

Exercice 6 La fonction $f(x) = |x|$ est-elle primitivable sur $\mathbb{R}$? si oui donner ses primitives.

Exercice 7 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

admet pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 8 Calculer les intégrales suivantes:

$$1) \int \frac{x \ln x dx}{(x^2 + 1)^2}, 2) \int_1^x \frac{e^t dt}{(3 + e^t) \sqrt{e^t - 1}}, 3) \int_{\sqrt{e}}^e \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

Exercice 9 Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}$. En déduire l'intégrale suivante:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}.$$

Exercice 10 Calculer les intégrales suivantes:

$$1) \int \sin^8 x \cos^3 x dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}.$$

$$3) \int \frac{x \ln x dx}{(x^2 + 1)^2}. (\text{par intégration par parties})$$

$$4) \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2}. (\text{poser } x = \tan t)$$