SOLUTION - SÉRIE N°2
DIPÔLE ET DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

ÉXO-1

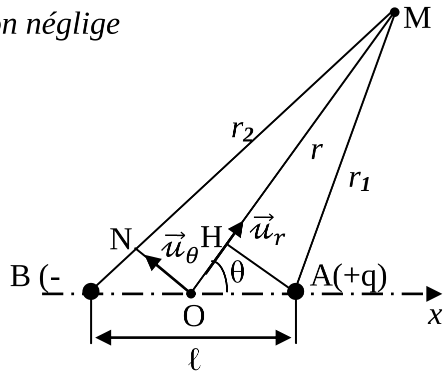
***1°)** Calculons le potentiel électrostatique du dipôle au point M en fonction des coordonnées polaires (r,θ) :*

$$V_M = V_A(M) + V_B(M) = K\,q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = K\,q\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 . r_2}\right)$$

Or, en admettant que $r \gg \ell$, on peut écrire :

$r_1 = r - OH = r - \frac{\ell}{2}\cos\theta$ *et* $r_2 = r + BN = r + \frac{\ell}{2}\cos\theta$

étant donné que $r \gg \ell$, donc : $r_2 - r_1 = \ell\cos\theta$ et $r_1 . r_2 = r^2$, si on néglige l'infiniment petit du 2ème ordre $\left(\frac{\ell^2\cos^2\theta}{4}\right)$ devant r^2, on aura :



$$\boxed{V_M = K\,q\left(\frac{\ell\cos\theta}{r^2}\right)}$$

Or : q.ℓ = p (p = moment dipolaire). Nous écrirons finalement :

$$\boxed{V_M = K\,\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$

***2°)** Déterminons les valeurs des composantes radiale et orthoradiale du vecteur champ électrique au point*
M, puis son module :

***a)** composantes **radiale** et **orthoradiale** du vecteur champ :*

Le champ électrique $\vec{E}$ dérive du potentiel V : $\vec{E}_M = -\overrightarrow{grad}V$ et le $\overrightarrow{grad}$ en coordonnées polaires s'écrit :

$$\overrightarrow{grad} = -\frac{d}{dr}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\vec{u}_\theta$$

soit :

$$\vec{E}_M = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}\vec{u}_\theta = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta$$

Ainsi :

$$E_r == -\frac{dV}{dr} = \frac{2Kp\cos\theta}{r^3} \quad et \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta} = \frac{Kp\sin\theta}{r^3}$$

***b) Module de $\vec{E}$** :*

$$\left|\vec{E}_M\right| = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} \quad soit \quad \left|\vec{E}_M\right| = \frac{Kp}{r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{Kp}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

***3°)** Écrivons les équations des surfaces équipotentielles.*

Les surfaces équipotentielles sont définies par $V = C^{te}$ donc :

$$V_M = K\,\frac{p\cos\theta}{r^2} = C \Rightarrow r^2 = \frac{Kp}{C}\cos\theta \Rightarrow r = \sqrt{\frac{Kp}{C}}\sqrt{\cos\theta}$$

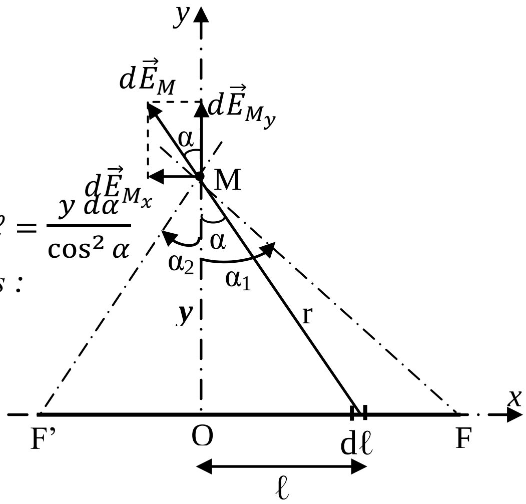
Soit : $\boxed{r = A\sqrt{\cos\theta}}$ *où A étant une constante*

ÉXO-2

***1°)** Le champ $d\vec{E}_M$ dû à un élément de longueur $d\ell$ de charge $dq = \lambda\, d\ell$ a pour expression :*

$$d\vec{E}_M = d\vec{E}_{M_x} + d\vec{E}_{M_y} \quad \text{où} \quad \begin{cases} d\vec{E}_{M_x} = -dE_{M_x}\,\vec{\imath} = -dE_M \sin\alpha\,\vec{\imath} \\ d\vec{E}_{M_y} = dE_{M_y}\,\vec{\jmath} = dE_M \cos\alpha\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

sachant que : $dE_M = \dfrac{K\,dq}{r^2} = \dfrac{K\,\lambda\,d\ell}{r^2}$



donc : $\begin{cases} dE_{M_x} = \dfrac{K\,\lambda\,d\ell}{r^2}\sin\alpha \\ dE_{M_y} = \dfrac{K\,\lambda\,d\ell}{r^2}\cos\alpha \end{cases}$

o r : $\cos\alpha = \dfrac{y}{r} \Rightarrow r = \dfrac{y}{\cos\alpha}$ *et* $\tan\alpha = \dfrac{\ell}{y} \Rightarrow \ell = y\,\tan\alpha \Rightarrow d\ell = \dfrac{y\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$

En substituant r^2 *et* $d\ell$ *par leurs valeurs, nous pourrons écrire alors :*

$$\begin{cases} dE_{M_x} = \dfrac{K\,\lambda\,d\ell}{r^2}\sin\alpha = \dfrac{K\,\lambda}{y}\sin\alpha\,d\alpha \\ dE_{M_y} = \dfrac{K\,\lambda\,d\ell}{y}\cos\alpha = \dfrac{K\,\lambda}{y}\cos\alpha\,d\alpha \end{cases}$$

Il vient :

$$E_{M_x} = \frac{K\,\lambda}{y}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{K\,\lambda}{y}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \quad \text{et} \quad E_{M_y} = \frac{K\,\lambda}{y}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1}\cos\alpha\,d\alpha$$

$$= \frac{K\,\lambda}{y}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)$$

Et finalement :

$$E_M = \sqrt{E_{M_x}^2 + E_{M_y}^2} = \frac{K\,\lambda}{y}\sqrt{2 + 2(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\alpha_2)} = \frac{K\,\lambda}{y}\sqrt{2[1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)]}$$

2°) a) *Évaluons* $\vec{E}_M$ *lorsque M se trouve dans le plan médiateur du fil F'F :*

Pour cela il suffit de prendre: $\alpha_1 = \alpha_2$

$$E_M = \frac{K\,\lambda}{y}\sqrt{2(1 - \cos 2\alpha_1)} = \frac{K\,\lambda}{y}\sqrt{2\left(1 - (\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1)\right)} = \frac{K\,\lambda}{y}\sqrt{2(2 - 2\cos^2\alpha_1)}$$

$$E_M = \frac{K\,\lambda}{y}\sqrt{4(1 - \cos^2\alpha_1)} = \frac{K\,\lambda}{y}\sqrt{4\sin^2\alpha_1} = \frac{2\,K\,\lambda}{y}\sin\alpha_1 = \frac{2\,K\,\lambda}{y}\left(\frac{d}{r}\right) = \frac{2\,K\,\lambda\,d}{y\sqrt{y^2 + d^2}}$$

$$\boxed{E_M = \frac{2\,K\,\lambda\,d}{y\sqrt{y^2 + d^2}}}$$

Autre méthode qui consiste à associer deux à deux les éléments dℓ de façon que les composantes normales à Oy des champs correspondants se compensent (raisons de symétrie par rapport à Oy); seules s'ajoutent les composantes $dE_{M_y} = dE_M\cos\alpha$.

$$Pour\ \alpha_1 = \alpha_2\ on\ aura: \quad E_{M_y} = \frac{K\,\lambda}{y}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_1) = \frac{K\,\lambda}{y}(2\sin\alpha_1)$$

$$et\ pour\ \sin\alpha_1 = \frac{d}{r}\ on\ obtient\ E_{M_y} = \frac{K\,\lambda}{y}\left(\frac{2d}{\sqrt{y^2 + d^2}}\right)\ d'où\ \boxed{E = E_y = \frac{2\,K\,\lambda\,d}{y\sqrt{y^2 + d^2}}}$$

b) *La contribution dV au potentiel V de l'élément de longueur dℓ indiqué sur la figure est :*

$$dV = K\frac{dq}{r} = K\frac{\lambda\,d\ell}{r} = K\,\lambda\frac{d\ell}{\sqrt{y^2 + \ell^2}}$$

$$Soit\ par\ intégration: \ dV = K\,\lambda\int_{-d}^{+d}\frac{d\ell}{\sqrt{y^2 + \ell^2}} = K\,\lambda\left[\ln\left(\ell + \sqrt{\ell^2 + y^2}\right)\right]_{-d}^{+d}$$

D'où finalement l'expression de V sur Oy :

$$\boxed{V = K\,\lambda\,\ln\left(\frac{d+\sqrt{d^2+y^2}}{-d+\sqrt{d^2+y^2}}\right)}$$

3°) *Quand le segment F'F est de longueur infinie, ceci implique que nous devons retrouver le résultat concernant le fil infini. Ceci se traduit par :* $\alpha_1 = \alpha_2 = {}^{\pi}/_{2}$

$$E_M = \frac{K\,\lambda}{y}\sqrt{2[1-\cos(\alpha_1+\alpha_2)]} = \frac{K\,\lambda}{y}\sqrt{2\left[1-\cos\left({}^{\pi}/_{2}+{}^{\pi}/_{2}\right)\right]} = \boxed{\frac{2\,K\,\lambda}{y}}$$

Où bien encore :

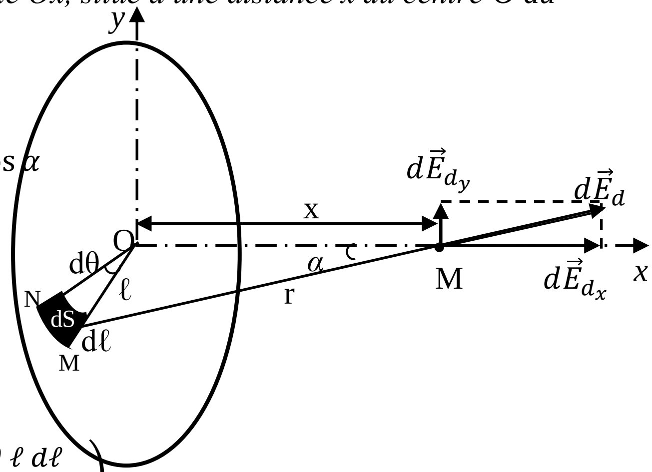
$$E_{M_x} = \frac{K\,\lambda}{y}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2) = \frac{K\,\lambda}{y}\left(\cos{}^{\pi}/_{2}-\cos{}^{\pi}/_{2}\right) = 0$$

$$E_{M_y} = \frac{K\,\lambda}{y}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2) = \frac{2\,K\,\lambda}{y}\sin\alpha_1 = \frac{2\,K\,\lambda}{y}\sin{}^{\pi}/_{2} = \frac{2\,K\,\lambda}{y}$$

$$Pour\ aboutir\ finalement\ \text{à}:\ \boxed{E_M = E_{M_y} = \frac{2\,K\,\lambda}{y}}$$

ÉXO-3

1°) a) *Détermination du champ* $\vec{E}_d$ *créé au point M de l'axe Ox, situé à une distance x du centre O du disque :*



Pour des raisons de symétrie par rapport à l'axe Ox la composante $E_{d_y} = 0$*, par conséquent le champ* $\vec{E}_d$ *n'admettra que la composante* $\vec{E}_{d_x}$ *, soit :* $dE_{d_x} = dE_d\cos\alpha$

Le champ $d\vec{E}_d$ *dû à un élément de surface dS de charge dq = σ dS, a pour expression :* $dE_d = \dfrac{K\,dq}{r^2} = \dfrac{K\,\sigma\,dS}{r^2}$

Nous écrirons donc : $dE_{d_x} = K\sigma\,\dfrac{dS}{r^2}\cos\alpha$

Or : $dS = \widehat{MN}\ d\ell = \ell\, d\theta\, d\ell$ *et* $\cos\alpha = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+\ell^2}}$

Alors : $dE_{d_x} = K\sigma\,\dfrac{\ell\,d\theta\,d\ell}{x^2+\ell^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\ell^2}} = K\sigma\,x\left(\dfrac{d\theta\,\ell\,d\ell}{(x^2+\ell^2)^{3/2}}\right)$

Il vient :

$$E_{d_x} = K\sigma\,x\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R}\frac{\ell\,d\ell}{(x^2+\ell^2)^{3/2}} = K\sigma\,x\,2\pi\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+\ell^2}}\right]_0^R$$

Finalement :

$$\boxed{E_d = E_{d_x} = 2\pi K\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)}$$

b) *Calcule du potentiel électrique V créé au point M :*

$$dV = \frac{K\,dq}{r} = \frac{K\,\sigma\,dS}{r} = \frac{K\,\sigma\,\ell\,d\theta\,d\ell}{\sqrt{x^2+\ell^2}} = K\sigma\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R}\frac{\ell\,d\ell}{\sqrt{x^2+\ell^2}}$$

$$\boxed{V = 2\pi K\sigma\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)}$$

2°) *Vérifions la relation entre le potentiel et le champ :* $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

$$E_d = -\frac{dV}{dx} = -2\pi K\sigma\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+R^2}}-1\right) = 2\pi K\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

On retrouve bien le même résultat que celui de la première question. La relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ *est vérifiée.*

3°) *Lorsque R →∞ (x << R) l'expression du champ devient :*

$$E = 2\pi K\sigma\left(1-\frac{x}{R\sqrt{\frac{x^2}{R^2}+1}}\right) = 2\pi K\sigma\left(1-\frac{x}{R}\right) = \boxed{2\pi K\sigma}\quad\left(vu\ que\ \frac{x}{R}\to 0\right)$$

Nous retrouvons ainsi, au voisinage immédiat du disque le champ d'un plan infini uniformément chargé.

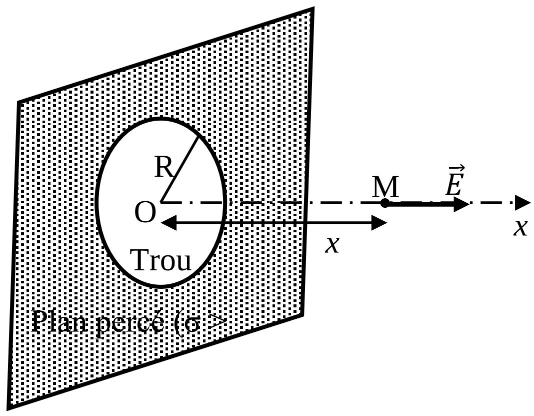
4°) *Le champ $\vec{E}$ crée par un plan infini portant une σ > 0 et percé d'un trou circulaire en un point M situé sur l'axe Ox du trou, est donné par :* $\vec{E}_{Pp} = \vec{E}_{Pi} - \vec{E}_{drR}$

$\vec{E}_{Pi} = \vec{E}_{drR}$ *lorsque* $R \to \infty$. *D'où :* $\vec{E}_{Pi} = 2\pi K\sigma\,\vec{\imath}$

Donc : $\vec{E}_{Pp} = \left[2\pi K\sigma - 2\pi K\sigma\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\right]\vec{\imath}$

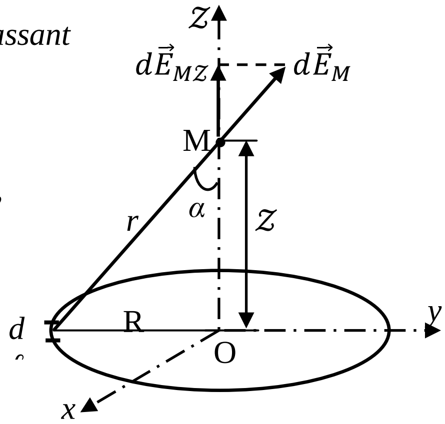
D'où : $\boxed{\vec{E}_{Pp} = \frac{2\,\pi\,K\,\sigma\,x}{\sqrt{x^2+R^2}}\,\vec{\imath}}$

Pp= Plan percé
Pi = Plan infini
drR = disque de rayon R



ÉXO-4

1°) *Calcule du champ et du potentiel crées en un point M de l'axe OZ passant par le centre O de la boucle :*



a) *Détermination du champ $\vec{E}$ créé au point M de l'axe OZ, situé à une distance Z du centre O :*
Le point M étant situé sur l'axe OZ passant par le centre de la boucle O, La symétrie du problème est donc totale par rapport à OZ, dans ces conditions, seule la composante E_{Mz} contribuera au calcul de E_M.

$$dE_{Mz} = dE_M\,\cos\alpha = \frac{K\,dq}{r^2}\cos\alpha = \frac{K\,\lambda\,d\ell}{r^2}\cos\alpha$$

$$dE_{Mz} = \frac{K\,\lambda\,d\ell}{(R^2+\mathcal{Z}^2)}\,\frac{\mathcal{Z}}{\sqrt{R^2+\mathcal{Z}^2}} = \frac{K\,\lambda\,\mathcal{Z}}{(R^2+\mathcal{Z}^2)^{3/2}}\,d\ell$$

$$E_{Mz} = \frac{K\,\lambda\,\mathcal{Z}}{(R^2+\mathcal{Z}^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} d\ell = \frac{2\pi RK\,\lambda\,\mathcal{Z}}{(R^2+\mathcal{Z}^2)^{3/2}}\quad et\ en\ fin\quad \boxed{E_M = E_{Mz} = \frac{2\pi RK\,\lambda\,\mathcal{Z}}{(R^2+\mathcal{Z}^2)^{3/2}}}$$

b) *Calcule du potentiel électrique V créé au point M :*

$$dV_M = \frac{K\,dq}{r} = \frac{K\,\lambda\,d\ell}{\sqrt{R^2+\mathcal{Z}^2}} \Longrightarrow V_M = \frac{K\,\lambda}{\sqrt{R^2+\mathcal{Z}^2}}\int_0^{2\pi R} d\ell = \boxed{\frac{2\pi RK\,\lambda}{\sqrt{R^2+\mathcal{Z}^2}}}$$

2°) a) *Énergie potentielle de la charge ponctuelle – q placée au point M :*

$$E_P = -qV_M = -\frac{2\pi R\,K\,\lambda\,q}{\sqrt{R^2+\mathcal{Z}^2}}$$

b) *Calcule du travail fourni pour ramener la charge (- q) du point M au centre de la boucle O :*

$$W_{M\to O} = -(-q)\Delta V = q\,\Delta V = q\,(V_O - V_M)$$

V_O *est le potentiel électrique créé au centre O par la boucle, il vaut :*

$$dV_O = \frac{K\,dq}{r} = \frac{K\,\lambda\,d\ell}{R} \Longrightarrow V_O = \frac{K\,\lambda}{R}\int_0^{2\pi R} d\ell = 2\,\pi\,K\,\lambda$$

$$\boxed{W_{M\to O} = q\left(2\,\pi\,K\,\lambda - \frac{2\pi RK\,\lambda}{\sqrt{R^2+\mathcal{Z}^2}}\right) = 2\,\pi\,K\,\lambda\,q\left(1-\frac{R}{\sqrt{R^2+\mathcal{Z}^2}}\right)}$$