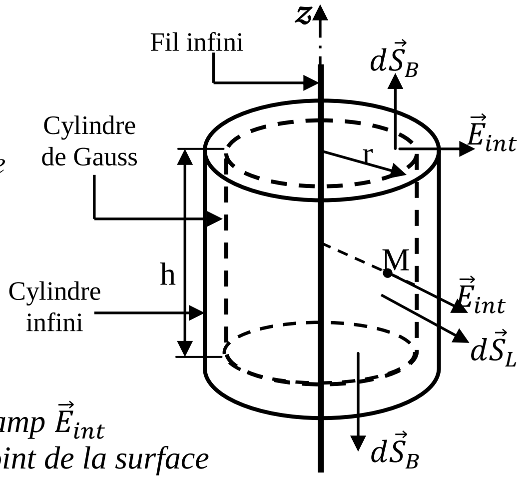
SOLUTION - SÉRIE N°3
Théorème de Gauss

EXO-1

1°) Calculons le champ électrostatique créé en un point M , par application du théorème de Gauss :

a) *Lorsque M se trouve à l'intérieur du cylindre :* **r < R**

Par symétrie, le champ est radial, et ne peut dépendre en un point M que de la distance r (r < R). Nous écrirons : $\vec{E}_{int} = \vec{E}_{int}(r)$.
Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre de hauteur h, d'axe Oz et de rayon r, passant par M où l'on veut calculer le champ. Ce cylindre fermé à ses extrémités par deux bases circulaires constitue la surface de Gauss.
Le théorème de Gauss s'écrit :



$$\phi = \oiint_S \vec{E}_{int}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Chaque élément de surface $d\vec{S}_B$ *de chacune des bases est normal au champ* $\vec{E}_{int}$ *et la contribution des bases au flux sortant est donc nulle. En chaque point de la surface latérale,* $\vec{E}_{int}$ *et* $d\vec{S}_L$ *sont colinéaires* $\left(\vec{E}_{int} \,//\, d\vec{S}_L\right)$ *, et* $\vec{E}_{int}$ *a une valeur constante.*

S_L = Surface Latérale S_B = Surface de Base

$$\phi = 2\phi_{S_B} + \phi_{S_L} = \phi_{S_L}$$

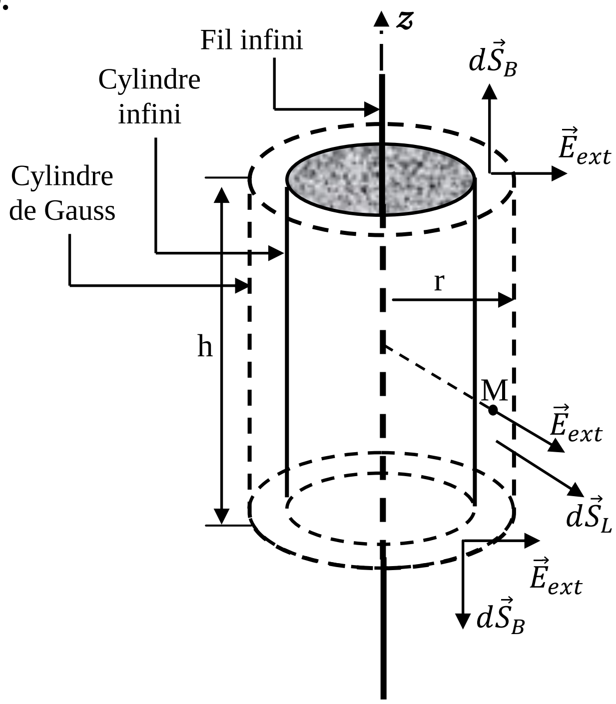
$$\phi_{S_L} = E_{int} \oiint_S dS_L = E_{int}\, S_L = E_{int}\, 2\pi r h$$

$\sum q_{int}$ *constitue la somme des charges intérieures contenues dans la surface latérale du cylindre de Gauss,*
Donc : $\sum q_{int} = \lambda\, h$.
Il vient alors :

$$\phi = \oiint_S \vec{E}_{int}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E_{int}\, 2\pi r h = \frac{\lambda\, h}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \boxed{E_{int} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

b) *Lorsque M se trouve à l'extérieur du cylindre* **(r > R)** *:*
Les conditions de calcule répondent exactement à ceux du ***(a).***

Champ radial, et $\phi_{S_B} = 0$ $(\vec{E}_{ext} \perp \vec{S}_B)$.



$$E_{ext} \oiint_S dS_L = E_{ext}\, S_L = E_{ext}\, 2\pi r h$$

$\sum q_{int}$ *= Charge du fil + Charge du cylindre*

Donc $\sum q_{int} = \lambda\, h + \oiint \sigma\, dS = \lambda\, h + \sigma\, S = \lambda\, h + \sigma 2\pi R h$

$$\sum q_{int} = \lambda\, h + \sigma 2\pi R h = (\lambda + 2\pi\sigma R) h$$

Finalement on peut écrire :

$$\phi = \oiint_S \vec{E}_{ext}.d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E_{ext}\, 2\pi r h = \frac{(\lambda + 2\pi\sigma R)\, h}{\varepsilon_0}$$

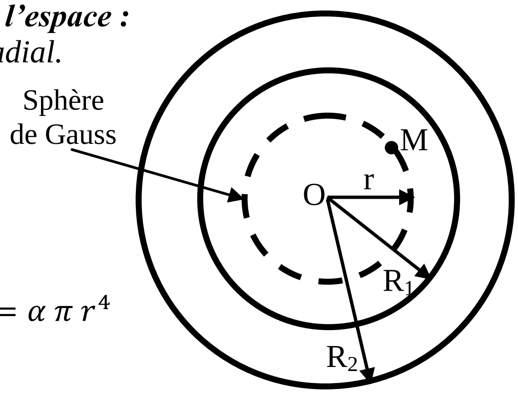
D'où : $\boxed{E_{ext} = \frac{(\lambda+2\pi\sigma R)}{2\pi\varepsilon_0 r}}$

EXO-2

1°) Détermination du champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace :

Étant donné la symétrie du problème, le champ est manifestement radial.

a) 1ere cas : r < R₁



.Le flux Φ sortant de la sphère de Gauss est :

$\Phi = E_1(r)\, S_G = E_1(r)\, 4\pi r^2$

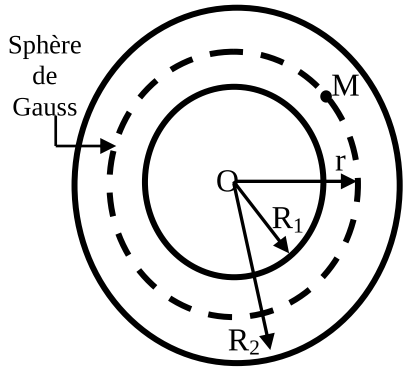
La charge intérieur à la sphère de Gauss est :

$$\sum q_{int} = \int_0^r \rho(r)\, dV = \int_0^r \alpha r . 4\pi r^2 dr = \alpha\, \pi\, r^4$$

On aura donc :

$$E_1(r) 4\pi r^2 = \frac{\alpha\, \pi\, r^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_1(r) = \frac{\alpha\, r^2}{4\, \varepsilon_0}}$$

b) 2ème cas : $R_1 < r < R_2$



$\Phi = E_2(r)\, S_G = E_2(r)\, 4\pi r^2$

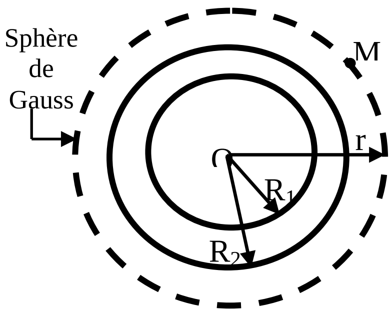
La charge intérieur à la sphère de Gauss est :

$$\sum q_{int} = \int_0^{R_1} \rho(r)\, dV = \int_0^{R_1} \alpha r . 4\pi r^2 dr = \alpha\, \pi\, R_1^4$$

Il vient :

$$E_2(r) 4\pi r^2 = \frac{\alpha\, \pi\, R_1^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2(r) = \frac{\alpha\, R_1^4}{4\, \varepsilon_0\, r^2}}$$

c) 3ème cas : $r > R_2$



$\Phi = E_3(r)\, S_G = E_3(r)\, 4\pi r^2$

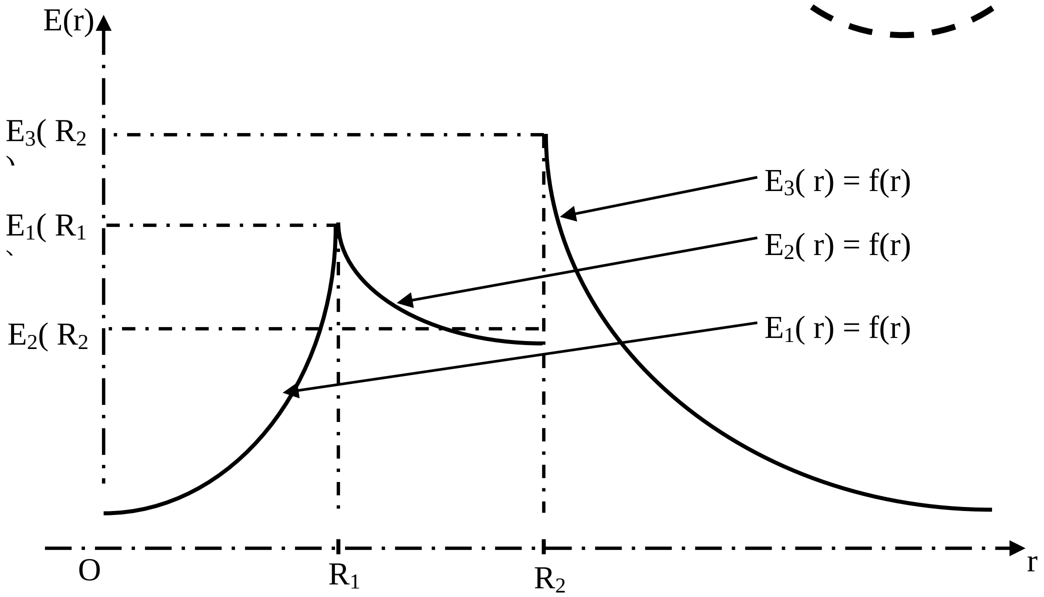
La charge intérieur à la sphère de Gauss est :

$$\sum q_{int} = q_{R_1} + q_{R_2} = \alpha\, \pi\, R_1^4 + \int_0^{R_2} \sigma\, dS = \alpha\, \pi\, R_1^4 + \sigma \int_0^{R_2} 8\pi r dr$$
$$= \alpha\, \pi\, R_1^4 + 4\pi\sigma R_2^2 = \pi(\alpha\, R_1^4 + 4\sigma R_2^2)$$

Finalement :

$$E_3(r) 4\pi r^2 = \frac{\pi(\alpha\, R_1^4 + 4\sigma R_2^2)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_3(r) = \frac{\alpha\, R_1^4 + 4\sigma R_2^2}{4\, \varepsilon_0\, r^2}}$$

Représentation graphique de E(r) :



Remarquons en particulier que $E(r)$ est continu dans tout l'espace, en particulier pour $r < R_2$; où l'on constate que $E_1(R_1) = E_2(R_1)$, ce fait est général en présence d'une distribution volumique de charges ; les discontinuités de $E(r)$ apparaissent en présence d'une distribution superficielle de charges, $E_2(R_2) \neq E_3(R_2)$

2°) *Détermination du potentiel électrostatique V(r) en tout point de l'espace :*

En utilisant la linéarité du gradient on peut écrire : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$.

Le champ $\vec{E}$ étant radial, ceci nous permet d'écrire :

$$E(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \Rightarrow dV(r) = -E(r)\,dr \Rightarrow V(r) = -\int E(r)\,dr$$

***a)** 1ere cas* : $r > R_2$

$$V_3(r) = -\int E_3(r)\,dr = -\int \frac{\alpha R_1^4 + 4\sigma R_2^2}{4\,\varepsilon_0\,r^2}dr = -\int \left(\frac{\alpha R_1^4 + 4\sigma R_2^2}{4\,\varepsilon_0}\right)\frac{dr}{r^2} = \left(\frac{\alpha R_1^4 + 4\sigma R_2^2}{4\,\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r} + C_1$$

Pour $r = \infty$ on a $V_3(\infty) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$. D'où :

$$\boxed{V_3(r) = \frac{\alpha R_1^4 + 4\sigma R_2^2}{4\,\varepsilon_0\,r}}$$

***b)** 2ème cas* : $R_1 < r < R_2$

$$V_2(r) = -\int E_2(r)\,dr = -\int \frac{\alpha R_1^4}{4\,\varepsilon_0\,r^2}dr = -\int \left(\frac{\alpha R_1^4}{4\,\varepsilon_0}\right)\frac{dr}{r^2} = \left(\frac{\alpha R_1^4}{4\,\varepsilon_0}\right)\frac{1}{r} + C_2$$

Nous allons déterminer la constante C_2, en exprimant la continuité de $V(r)$ pour $r = R_2$; cette condition de continuité se traduit en écrivant :

$$V_2(R_2) = V_3(R_2) \Rightarrow \left(\frac{\alpha R_1^4}{4\,\varepsilon_0}\right)\frac{1}{R_2} + C_2 = \frac{\alpha R_1^4 + 4\sigma R_2^2}{4\,\varepsilon_0\,R_2} \Rightarrow C_2 = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}\ ;\ d'où :$$

$$\boxed{V_2(r) = \frac{\alpha R_1^4}{4\,\varepsilon_0\,r} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}}$$

***c)** 3ème cas* : $r < R_1$

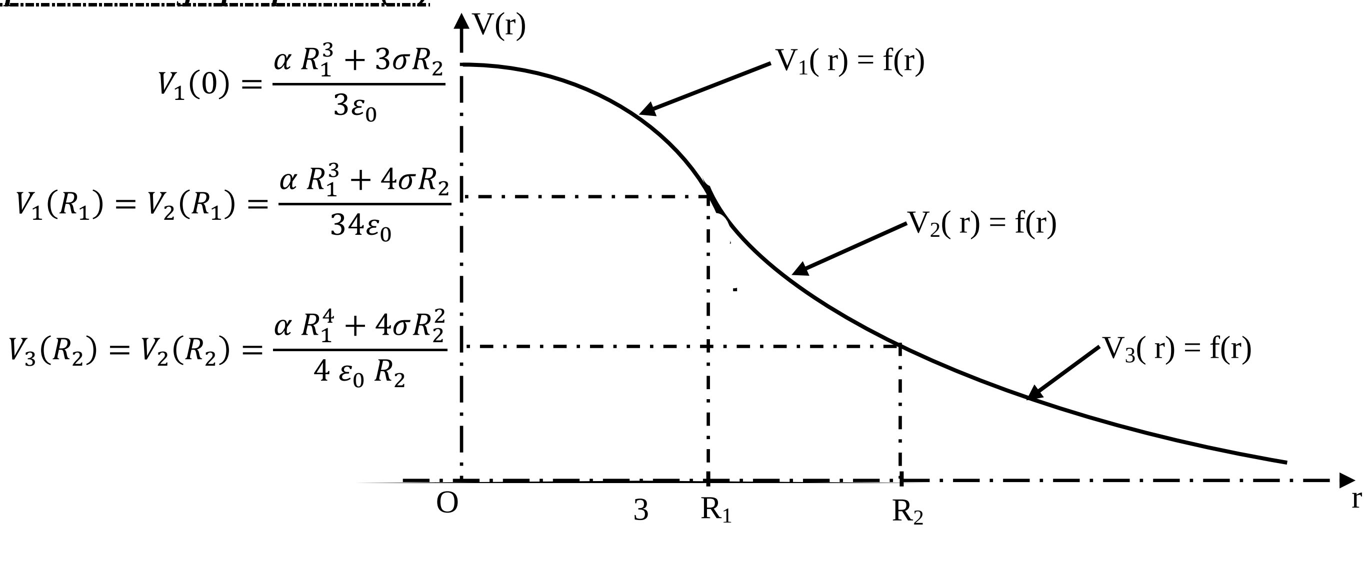
$$V_1(r) = -\int E_1(r)\,dr = -\int \frac{\alpha r^2}{4\,\varepsilon_0}dr = -\frac{\alpha r^3}{12\,\varepsilon_0} + C_3$$

Pour le calcul de C_3, on utilise les mêmes conditions que celles affichées au 2ème cas, mais pour $r = R_1$:

$$V_1(R_1) = V_2(R_1) \Rightarrow -\frac{\alpha R_1^3}{12\,\varepsilon_0} + C_3 = \frac{\alpha R_1^4}{4\,\varepsilon_0\,R_1} + \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow C_3 = \frac{\alpha R_1^3 + 3\sigma R_2}{3\varepsilon_0}\ ;\ d'où :$$

$$\boxed{V_1(r) = -\frac{\alpha r^3}{12\,\varepsilon_0} + \frac{\alpha R_1^3 + 3\sigma R_2}{3\varepsilon_0}}$$

Représentation graphique de V(r) :

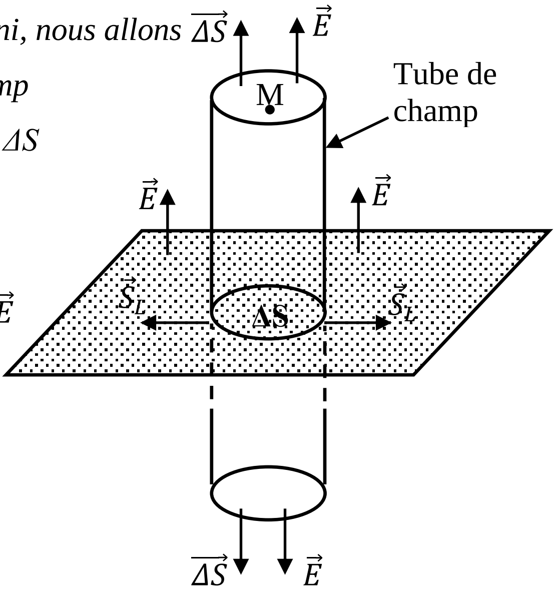


On remarque que, dans ce cas, le potentiel est continu en dépit de la présence d'une couche superficielle de charges qui entrainait une discontinuité du champ.

EXO-3

1°) Calcule du champ électrostatique produit par un plan infini en tout point de l'espace, en utilisant le théorème de Gauss :

Pour calculer le champ électrostatique produit par un plan infini, nous allons considérer une surface de Gauss constituée par un tube de champ perpendiculaire au plan, et fermé par deux éléments de surface ΔS parallèles au plan et symétriques par rapport à celui-ci.



Donc : $S_{Gauss} = S_{Latérale} + 2\,\Delta S$

Les lignes de champ sont perpendiculaires au plan. Le sens de $\vec{E}$ *Change lorsque l'on traverse le plan chargé.*

$\Phi = \Phi_{S_L} + 2\Phi_{\Delta S} \Rightarrow \vec{E}.\vec{S}_G = \vec{E}\left(\vec{S}_L + 2\overrightarrow{\Delta S}\right) = \vec{E}.\vec{S}_L + \vec{E}.2\overrightarrow{\Delta S}$

mais $\Phi_{S_L} = \vec{E}.\vec{S}_L = 0$ *car* $\vec{E} \perp \vec{S}_L$ *; donc :* $\vec{E}.\vec{S}_G = 2\vec{E}.\overrightarrow{\Delta S}$

or : $\vec{E}\ //\ \overrightarrow{\Delta S} \Rightarrow E\,S_G = 2\,E\,\Delta S$

de l'autre coté on a : $\sum q_{int} = \sigma\,\Delta S$

Le théorème de Gauss s'écrit alors :

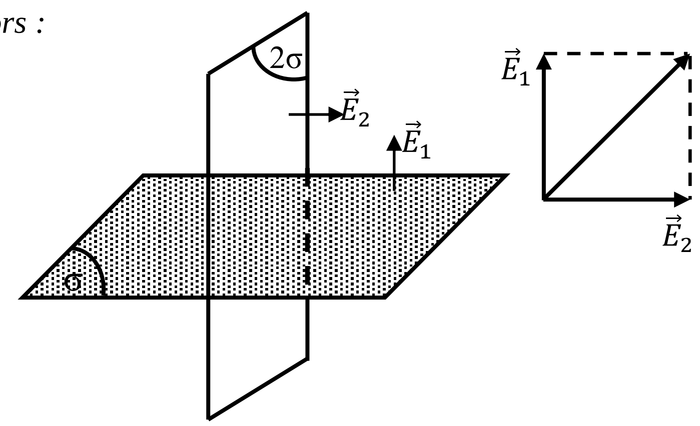
$$2\,E\,\Delta S = \frac{\sigma\,\Delta S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}}$$

Nous retrouvons un résultat identique à celui de la 3ème question de l'exercice 3 de la série 2.

2°) Détermination du champ électrostatique engendré par deux plans infinis perpendiculaires, et de densités de charges respectives σ et 2σ.

Soit $\vec{E}_1$ *le champ créé par le plan de densité σ, et soit* $\vec{E}_2$ *Le champ créé par le plan de densité 2σ.*

Le champ total créé par les deux plans sera alors :



$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{2\,\sigma}{2\,\varepsilon_0}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2}$

Finalement : $\boxed{E = \frac{\sqrt{5}\,\sigma}{2\,\varepsilon_0}}$