Université Badji-Mokhtar, Annaba, Département de Première Année Sciences Techniques
Année universitaire: 2019-2020
Promotion: 1^{ere} ST

Solution: TD MATHS2

Série N 1 : Analyse

Rapels: $f(\sin x, \cos x) = \int \sin^p x \cos^q x \, dx$

1. si p impair on pose $u = \cos x$
2. si q impair on pose $u = \sin x$
3. si p et q impair on fait un changement $u = \cos x$ ou $u = \sin x$
4. si p et q pair on pose $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
   $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

Exercice 5

1)

On commence par le premier exemple

$$\int \sin^{2019} x \cos^3 x dx \tag{1}$$

$p = 2019$ et $q = 3$ sont impairs
donc on pose $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$
$dx = \frac{du}{\cos x}$.
On remplacant dans (1), on obtient

$$\begin{aligned}
\int \sin^{2019} x \cos^3 x dx &= \int u^{2019} \cos^2 x \cos x \frac{du}{\cos x} \\
&= \int u^{2019}(1 - u) \, du \\
&= \int u^{2019} du - \int u^{2021} du \\
&= \frac{1}{2020} u^{2020} - \frac{1}{2022} u^{2022} + C
\end{aligned}$$

et en fin

$$\int \sin^{2019} x \cos^3 x dx = \frac{1}{2020} (\sin x)^{2020} - \frac{1}{2022} (\sin x)^{2020} + C$$

2)

$$I_2 = \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx \tag{2}$$

1. p et q pair on pose $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ et $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

On remplacant dans (2), on obtient

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x) \, dx \\
&= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) \, dx
\end{aligned}$$

et comme $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$,
donc 1

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x) \tag{*}$$

En remplaçant $(*)$ dans (2), on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{4}\int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x)\, dx \\ &= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx. \end{aligned}$$

Donc

$$I_2 = \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

3)

$$I_3 = \int \sin 3x \cos 5x\, dx \tag{3}$$

on applique la formule trgonometrique suivante

$$\sin a\ \cos b = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b).$$

Si je remplace $a = 3x$, $b = 5x$, on obtient

$$\begin{aligned} \int \sin(3x).\cos(5x)dx &= \int (\frac{1}{2}\sin(8x) + \frac{1}{2}\sin(-2x))dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sin(8x)dx - \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx \\ (3) &= -\frac{1}{16}\cos(8x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C \end{aligned}$$

4 $\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)}$ On applique la règle de Bioche

$$\text{On pose} \begin{cases} t = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

donc l´integrale (4) devient :

$$\begin{aligned} (4) &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{2dt}{2+2t} \\ &= \int \frac{dt}{1+t} = \ln \mid 1+t \mid + C \end{aligned}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)} = \ln \mid 1+\tan(\frac{x}{2}) \mid + C$$

Série 2 Algébre

On va commencer par ĺexercice 2 (**Le Déterminants**).
En générale:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}$$

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = (1) * (5) - (-7) * (3) = 5 + 21 = 26.$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 15 & 7 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

   $= 2\left[(15) * (0) - (7) * (-2)\right] - 3\left[(5) * (0) - (7) * 0\right] + 3\left[(5) * (-2) - ((15) * 0)\right]$

   $= 2(14) - 3(0) + 3(-10)$

   $= 28 - 30 = -2$

   même chose pour les autres, on trouve

3. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$

4. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = -54.$

$\square$