Méthodes Numériques. **Année universitaire 2019/2020**

Serie n° 2

Exercice 1

1- Soient la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$ et les points $x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$ et $x_3 = 3/2$. Parmis les polynômes suivants, quel est celui qui interpole f aux points x_0, x_1, x_2, et x_3 :

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \text{ ou } q(x) = x^4 - 1 \text{ ou bien } h(x) = \frac{8}{3}x(x^2 - 3x + 2).$$

2- Calculer le polynôme d'intrepolation de Lagrange de la fonction

$$f(x) = 3 + |x| + 2\tan(\pi/4)\, x,$$

aux points -1, 0 et 1. Puis calculer la valeur approchée de $f(1/2)$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie discrètement par

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	2	0	1	0	2

1. Faire la table des différences divisées et écrire le polynôme d'interpolation de cette fonction sur $[-2, 2]$, sous la forme de Newton.
2- Calculer la valeur approchée de $f(0.63)$.

Exercice 3

Avec quelle précision peut − on calculer $\ln 2.8$ en interpolant la fonction $f(x) = \ln(x + 2)$, aux points $x_0 = 0, x_1 = 1/4, x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$ et $x_4 = 1$.

Solution

Exercice 1

1- Le polynômes P interpole la fonction f aux points $x_0, x_1, \cdots, x_n$ si (par définition) $P(x_i) = f(x_i)$, pour tout $i = 0, 1, \cdots, n$, en plus on doit avoir $\deg P \leq n =$ nombre de points -1.

- $\deg p = 3 \leq$ nombre de points-1, mais $p(0) = 1 \neq f(0)$, alors ce polyôme n'est pas la solution recherchée.

- $\deg q = 4 > 3 =$nombre de points -1, alors ce polyôme n'est pas la solution recherchée.

- $\deg h = 3 \leq$ nombre de points-1 et $P(x_i) = f(x_i)$, pour tout $i = 0, 1, 2, 3$. Donc h est le polynômes interpolant la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$, aux points $x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$ et $x_3 = 3/2$.

2- Le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par

$$\pounds_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \quad \text{pour tout } x \in [\min\{x_i\}, \max\{x_i\}]$$

où $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Dans cet exercice $n = 2$, alors $\pounds_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$, où

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1)(\mathbf{-1} - \mathbf{1})} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
l_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(+1)(\mathbf{-1})} = -x^2 + x \quad \text{et} \\
l_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x+1)x}{(-1+1)(\mathbf{1})} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.
\end{aligned}$$

Donc $\pounds_2(x) = 2\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 3\left(-x^2 + x\right) + 6\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) = \boxed{x - x^2 = \pounds_2(x).}$

Dans ce cas on peut écrire que $f(x) \approx \pounds_2(x)$, pour tout $x \in [-1, 1]$. Par conséquent $f(1/2) \approx 1/4$.

Exercice 2

1- Le tableau des différences divisées de la fonction f est

x_i	$f[x_i] = y_i$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+4}]$
-2	$2 \searrow$				
-1	$0 \rightarrow$	$f[x_0, x_1] = -2$			
0	1	$f[x_1, x_2] = 1$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3}{2}$		
1	0	$f[x_2, x_3] = -1$	$f[x_1, x_2, x_3] = -1$	$f[x_0, \cdots, x_3] = -\frac{5}{6}$	
2	2	$f[x_3, x_4] = 2$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{3}{2}$	$f[x_1, \cdots, x_4] = \frac{5}{6}$	$f[x_0, \cdots, x_4] = \frac{5}{12}$

Pour calculer les différences divisées entre 2 points consécutives ($3^{ième}$ colonne), on recule d'une colonne en restant dans la même ligne, puis on calcul la différence entre cette valeur et la valeur en haut, ensuite on divise le résultat trouvé sur la différence entre ces 2 points.

Pour calculer les différences divisées entre 3 points consécutives ($4^{ième}$ colonne), on recule d'une colonne en restant dans la même ligne, puis on calcul la différence entre cette valeur et la valeur en haut, ensuite on divise le résultat trouvé sur la différence entre le premier et le dernier point.

On continue lde calculer les differntes valeurs qui existent dans les colonnes qui restent, en utilisant le même raisonnement. On n'oublie pas de prendre la même direction pour calculer la différence (de haut en bas ou bas en haut)

Le polynôme d'interpolation de Newton pour une fontion f aux point $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, est donné par la formule

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left[x_0, x_1, \cdots, x_i\right].w_i(x),$$

où $w_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$, pour $n \geq 1$ et par convention $w_0(x) = 1$ et $f[x_0] = f(x_0)$. Dans cet exercice $n = 4$.

D'aprés la formule de Π_n, on aura besoiun des valeurs qui exoste dans la diagonale de la partie doite du tableau des différences divisées (la partie qui contient les différentes valeurs des différences divisées), ce qui nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}\Pi_4(x) &= f(x_0)w_0(x) + f[x_0,x_1]w_1(x) + f[x_0,x_1,x_2]w_2(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3]w_3(x) \\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]w_3(x) \\ &= 2 - 2(x+2) + \frac{3}{2}(x+2)(x+1) - \frac{5}{6}(x+2)(x+1)x + \frac{5}{12}(x+2)(x+1)x(x-1) \\ &= \boxed{\frac{5}{12}x^4 - \frac{17}{12}x^2 + 1 = \Pi_4(x).}\end{aligned}$$

Ce polynôme nous permet de donner une valeur approchée pour $f(x)$, pour tout $x \in [\min x_i, \max x_i] = [-2, 2]$, par conséquent on a

$$\boxed{f(0.63) \approx \Pi_4(0.63) = 0.50336.}$$

Exercice 3

D'aprés le dernier théorème du chapitre 2, l'erreur de l'interpolation d'une fonction f définie aux points $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, si cette fonction est de classe $C^{n+1}[a,b]$, cette erreur vérifie l'estimation suivante:

$$e_n(x) = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|,$$

où $M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$ et P_n est le polynôme d'interpolation.

Dans cet exercice, on définie la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x+2)$, qui est indéfiniment dérivable sur $]-2,+\infty[$, c'est-à-dire que $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n existe pour tout entieer $n \geq 1$, sur $]-2,+\infty[$. Si on interpole f aux points $x_0 = 0, x_1 = 1/4, x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$ et $x_4 = 1$, l'erreur dans ce cas verifie l'estimation

$$e_4(x) = |f(x) - P_4(x)| \leq \frac{\max_{x\in[0,1]} \left|f^{(5)}(x)\right|}{5!} \prod_{i=0}^{4} |x - x_i|.$$

Calculons maintenant les dérivées succéssives de f jusqu'à l'ordre 5 sur l'intervalle $]-2,+\infty[$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{x+2} = (x+2)^{-1} \Rightarrow f''(x) = -(x+2)^{-2} \Rightarrow \\ f^{(3)}(x) &= -(-2)(x+2)^{-3} = 2(x+2)^{-3} \Rightarrow \\ f^{(4)}(x) &= 2 \times (-3)(x+2)^{-4} = -6(x+2)^{-4} \Rightarrow \\ f^{(5)}(x) &= (-6) \times (-4)(x+2)^{-5} = 24(x+2)^{-5}.\end{aligned}$$

Pour déterminer M_5 on étudie les variations de $f^{(5)}$, pour cela on la dérive et on étudie son signe.

$$\left(f^{(5)}\right)'(x) = f^{(6)}(x) = 24(-5)\left(x+2\right)^{-6} = -120\left(x+2\right)^{-6} < 0,$$

pour tout $x \in]-2,+\infty[$, cela veut dire que $f^{(5)}$ est strictement décroissante sur cet intervalle Donc, on peut avoir

$$\forall x \in [0,1] \text{ on a } 0 < f^{(5)}(1) \leq f^{(5)}(x) \leq f^{(5)}(0),$$

par conséquent $M_5 = f^{(5)}(0) = \dfrac{24}{2^5} = \dfrac{3}{4}$, alors pour tout $\forall x \in [0,1]$ on a

$$e_4(x) = |f(x) - P_4(x)| \leq \frac{3}{4.5!}\, x \left|x - \frac{1}{4}\right| . \left|x - \frac{1}{2}\right| . \left|x - \frac{3}{4}\right| . |x-1| \, .$$

Dans cet exercice on cherche une valeur approchée de $\ln 2.8$, donc on remplace x par 0.8, ce qui nous permet d'avoir

$$\begin{aligned}
e_4(0.8) &= |f(0.8) - P_4(0.8)| \\
&\leq \frac{3}{4.5!}\, 0.8 \left|0.8 - \frac{1}{4}\right| . \left|0.8 - \frac{1}{2}\right| . \left|0.8 - \frac{3}{4}\right| . |0.8 - 1| \\
&= \frac{3}{4.5!}\, 0.8.(0.8-0.25).(0.8-0.5).(0.8-0.75).(1-0.8) \\
&= 0.275 \times 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Donc on peut avoir une valeur approchée de $\ln 2.8$ avec une précision $\leq 0.275 \times 10^{-4}$, c'est -à-dire 5 c. s. e.