Série 3

Exercice 1 On considère la fonction f définie par le tableau de valeurs suivant :

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x_i)$	0.1	0.17	0.13	0.15	0.23	0.25	0.21	0.22	0.25	0.23	0.26

Calculer les intégrales suivants par la méthode des trapèzes puis par la méthode de Simpson:

$$(1) \quad \int_0^1 f(x)dx \qquad (2) \quad \int_0^1 xf(x)dx$$

Exercice2 Soit donnée l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$.

1- Donner une valeur approchée de I, pour $n = 10$, en utilisant la formule des trapèzes puis la formule de Simpson.
2- Comparer les résultats trouvés avec la valeur exacte. Que peut-on conclure?

Exercice 3 Soit donnée l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$.

1- Donner une valeur approchée de cette intégrale par les formules des trapèzes puis Simpson pour $n = 10$.
2- Comparer les résulats trouvés avec la valeur exacte de l'intégrale. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 4 Calculer une valeur approchée de l'intégrale définie par la formule de Simpson à 10^{-6} près, puis comparer le résultat trouver avec la valeur exacte de l'intégrale.

Résolution

Exercice 1

1- La formule des trapèses est donnée par $I_T(f) = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + \frac{y_n}{2}\right]$, où $h = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$; pour tout $i = 0, 1, \cdots, n$, $\;y_i = f(x_i)$ et $x_i = a + ih$.

D'aprés le tableau on obtient que $n = 10, [a, b] = [0, 1]$ et $h = 1/10$.

En remplaçant les y_i par leurs valeurs respeectives dans I_T, on obtient que

$$I_T(f) = \frac{0.05 + 0.17 + 0.13 + 0.15 + 0.23 + 0.25 + 0.21 + 0.22 + 0.25 + 0.23 + 0.13}{10}.$$

Alors $\boxed{I_T(f) = 0.202.}$

La formule de Simpson est donnée par $I_S(f) = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2 + y_n\right]$, où $\sigma_1 = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots y_{n-1}$, $\quad \sigma_2 = y_2 + y_4 + y_6 + \cdots y_{n-2}$ et $n = 2p$ (pair).

En sommant les y_i ayant des indices pairs puis les y_i ayant les indices impairs sauf le premier et le dernier (y_0 et y_{10}) on obtient $\sigma_1 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 = 1.02$ et $\sigma_2 = y_2 + y_4 + y_6 + y_8 = 0.82$, donc

$$I_S(f) = \frac{0.1 + 4 \times 1.02 + 2 \times 0.82 + 0.26}{30} = \boxed{0.20267 = I_S(f)}$$

2- Dans cette partie on calcul des valeurs approchées de $\int_0^1 x f(x) dx$, les nouveaux y_i sont $\widetilde{y}_i = x_i \times y_i$, donc on rajoute une autre ligne dans le tableau qui définie la fonction f pour avoir

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x_i)$	0.1	0.17	0.13	0.15	0.23	0.25	0.21	0.22	0.25	0.23	0.26
$\widetilde{y}_i$	0	0.017	0.026	0.045	0.092	0.125	0.126	0.154	0.2	0.207	0.26.

Tableau -1-

Donc $I_T(xf) = \frac{1.122}{10} = \boxed{0.1122 = I_T(xf)}$.
Pour la formule de Simpson $\sigma_1 = \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_3 + \widetilde{y}_5 + \widetilde{y}_7 + \widetilde{y}_9 = 0.548$ et $\sigma_2 = \widetilde{y}_2 + \widetilde{y}_4 + \widetilde{y}_6 + \widetilde{y}_8 = 0.444$. Alors

$$I_S(xf) = \frac{0 + 4 \times 0.548 + 2 \times 0.444 + 0.26}{30} = \boxed{0.11133 = I_S(xf).}$$

Exercice 2

1- On veut donner des valeurs approchées pour l'intégrale $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$

La formule des trapèses est donnée par $I_T(f) = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + \frac{y_n}{2}\right]$, où $h = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$; pour tout $i = 0, 1, \cdots, n$, $y_i = f(x_i)$ et $x_i = a + ih$.
Dans ce cas, $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$, $n = 10$ et $h = 1/10$.

Pour calculer les y_i qui sont les images des $x_i = i/10; i = 0, 1, \cdots, 10$, par la fonction f, on utilise la plus grande précision possible, car les formules de quadratures ne sont pas des formules exactes, ils sont des formules approchées pour le cacul des intégrales. Donc les y_i seront donnés avec une précision de 10^{-8} (i. e. 8 chiffres aprés la virgule) et ils seront écrits dans un tableau (par ligne ou par clonne)de la fome

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.1	0.99009901
2	0.2	0.96153846
3	0.3	0.91743119
4	0.4	0.86206896

5	0.5	0.8
6	0.6	0.73529412
7	0.7	0.67114094
8	0.8	0.6097561
9	0.9	0.55248619
10	1	0.5.

tableau -2-

En remplaçant les y_i par leurs valeurs respectives dans $I_T(f)$ on obtient

$$I_T(f) = \frac{1}{10}\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + \frac{y_{10}}{2}\right] = \boxed{0.784981497 = I_T(f)}.$$

La formule de Simpson est donnée par $I_S(f) = \dfrac{h}{3}\left[y_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2 + y_n\right]$, où $\sigma_1 = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots y_{n-1}$, $\quad \sigma_2 = y_2 + y_4 + y_6 + \cdots y_{n-2}$ et $n = 2p$ (pair). En utilisant le tableau -2- on obtient

$$\begin{array}{l} \sigma_1 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 = 3.931159259 \\ \sigma_2 = y_2 + y_4 + y_6 + y_8 = 3.16865764 \end{array} \Rightarrow \boxed{I_S(f) = 0.78539841}.$$

2- **Valeur exacte** Calculant maintenant la valeur exacte de cette intégrale

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \Big[\arctan x\Big]_{x=0}^{x=1} \\ &= \arctan 1 - \arctan 0 = \boxed{0.78539816 = I} \end{aligned}$$

$|I - I_T(f)| \leq 0.5 \times 10^{-3}$ et $|I - I_S(f)| \leq 0.5 \times 10^{-6}$, par conséquent la formule de quadrature de Simpson et plus précise que la formule des trapèses. En plus, la formeule des trapèzes nous donne une valeur approchée avec 3 c.s.e., par contre la formule de Simpson nous dones 5 c.s.e. (avant la virgule on a un zéro)

.

Exercice 3

1- On veut donner des valeurs approchées pour l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$.

La formule des trapèses est donnée par $I_T(f) = h\left[\dfrac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + \dfrac{y_n}{2}\right]$, où $h = \dfrac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$; pour tout $i = 0, 1, \cdots, n$, $\; y_i = f(x_i)$ et $x_i = a + ih$. Dans ce cas, $[a,b] = [0,1]$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}, n = 10$ et $h = \pi/4$. L'unité de mesure des x_i est le **Radian**.

Pour calculer les y_i qui sont les images des $x_i = i/10; i = 0, 1, \cdots, 10$, par la fonction f, on utilise la plus grande précision possible, car les formules de quadratures ne sont pas des formules exactes, ils sont des formules approchées pour le cacul des intégrales. Donc les y_i seront donnés avec une précision de 10^{-8} (i. e. 8 chiffres aprés la virgule) et ils seront écrits dans un tableau (par ligne ou par clonne)de la fome

i	x_i	y_i	5	$5\pi/40 = \pi/8$	0.44831529
0	0	0	6	$6\pi/40 = 3\pi/20$	0.57185378
1	$\pi/40$	0.07894507	7	$4\pi/40$	0.71870974
2	$\pi/20$	0.16035872	8	$8\pi/40 = \pi/5$	0.89805595
3	$3\pi/40$	0.24690064	9	$9\pi/40$	1.12319041
4	$\pi/10$	0.34164079	10	$\pi/4$	1.41421356.

tableau -3-

En remplaçant les y_i par leurs valeurs respectives dans $I_T(f)$ on obtient

$$I_T(f) = \frac{\pi}{140}\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + \frac{y_{10}}{2}\right] = \boxed{0.41587431 = I_T(f)}.$$

La formule de Simpson est donnée par $I_S(f) = \dfrac{h}{3}\left[y_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2 + y_n\right]$, où $\sigma_1 = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots y_{n-1}$, $\quad \sigma_2 = y_2 + y_4 + y_6 + \cdots y_{n-2}$ et $n = 2p$ (pair). En utilisant le tableau -3- on obtient

$$\begin{array}{l} \sigma_1 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 = 2.5101522 \\ \sigma_2 = y_2 + y_4 + y_6 + y_8 = 1.97190924 \end{array} \Rightarrow \boxed{I_S(f) = 0.41422623}.$$

2- **Valeur exacte** Calculant maintenant la valeur exacte de cette intégrale, on utilise le changement de variable suivant $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx. = -\int_1^{\sqrt{2}/2} u^{-2} du \\ &= \left[-\frac{1}{u}\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} = \sqrt{2} - 1 = \boxed{0.41421356 = I} \end{aligned}$$

$|I - I_T(f)| \leq 0.2 \times 10^{-2}$ et $|I - I_S(f)| \leq 0.2 \times 10^{-4}$, par conséquent la formule de quadrature de Simpson et plus précise que la formule des trapèses. En plus, la formeule des trapèzes nous donne une valeur approchée avec 2 c.s.e., par contre la formule de Simpson nous dones 4 c.s.e.

Exercice 4

On veut donner une valeur approchée de $I = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$,par la formule de Simpson avec une précision de 10^{-6}, alors il suffit de supposer que l'erreur commise par cette formule, qui est donnée par l'estimation

$$|R_S(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{a\leq x\leq b} \left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{(b-a)h^4}{180} \max_{a\leq x\leq b} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

est $\leq 10^{-6}$.

Pour tout $x > 1$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} = -(x+1)^{-2} \\ &\Rightarrow f^{(3)}(x) = -(-2)(x+1)^{-3} = 2(x+1)^{-3} \Rightarrow f^{(4)}(x) = 2\times(-3)(x+1)^{-4} \\ &\Rightarrow f^{(4)}(x) = -6(x+1)^{-4} < 0. \end{aligned}$$

Pour déterminer le $\max_{a\leq x\leq b} \left|f^{(4)}(x)\right|$, on étudie ces variations, pour cela on calcule sa dérivée qui est

$$f^{(5)}(x) = -6\times(-4)(x+1)^{-5} = 24(x+1)^{-5} > 0.$$

Par conséquent $f^{(4)}$ est croissante sur $]1,+\infty[$. Ce qui nous permet de dire que pour tout $x \in [0,1]$ on a: $f^{(4)}(0) \leq f^{(4)}(x) \leq f^{(4)}(1) < 0$ alors

$$\max_{x\in[0,1]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \left|f^{(4)}(0)\right| = 6;$$

d'où

$$\begin{aligned} |R_S(f)| &\leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{a\leq x\leq b} f^{(4)}(x) = |R_S(f)| \leq \frac{1\times 6}{180n^4} = \frac{1}{30n^4} \leq 10^{-6} \\ &\Rightarrow n^4 \geq 10^6/30 \Rightarrow n \geq \left(10^6/30\right)^{-4} \approx 13.512. \end{aligned}$$

Donc il suffit de prendre $\boxed{n = 14}$. Dans ce cas on peut avoir le tableau suivant

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	0	0
1	1/14	0.0689928715
2	2/14	0.1335313926
3	3/14	0.1941560144
4	4/14	0.2513144283
5	5/14	0.3053816496
6	6/14	0.3566749439

7	7/14	0.4054651081
8	8/14	0.4519851237
9	9/14	0.4964368863
10	10/14	0.5389965007
11	11/14	0.5798184953
12	12/14	0.6190392084
13	13/14	0.6567795364
14	1	0.6931471806.

Tableau -4-

Alors $I_S(f) = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2 + y_{14}\right]$, où $h = 1/14$ et

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11} + y_{13} = 2.7070305613\\ \sigma_1 &= y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10} + y_{12} = 2.351542131,\end{aligned}$$

d'où $\boxed{I_S(f) = 0.38629415023.}$

<u>Valeur exacte</u> On utilise l'intégration par parties et on pose $u = \ln(x+1)$ et $dv = dx \Rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$ et $v = x$, alolrs

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \ln(x+1)\,dx = \Big[x\ln(x+1)\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx\\ &= \ln 2 - \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{x+1}\right]dx = \ln 2 - \Big[x - \ln(x+1)\Big]_{x=0}^{x=1}\\ &= \ln 2 - [1 - \ln 2] = 2\ln 2 - 1 = 0.38629436.\end{aligned}$$

Donc $|I - I(f)| \leq 0.3 \times 10^{-6}$.