**Université Badji Mokhtar, Annaba** **Année universitaire 2019/2020**
**$2^{\text{ème}}$ Année S.T.**

# Série 4.

**Exercice 1** On considère le problème de Cauchy suivant

$$(P1)\begin{cases} y' = f(x,y) = x + y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1- Résoudre ce problème numériquement avec le schéma d'Euler explicite puis le schéma d'Euler amélioré dans $[0,1]$ pour $h = 1/10$.
2- Déterminer la solution exacte de ce problème.
3- Comparer les les résutats trouvés dans les deux premières questions. Que-peut-on concclure?

**Exercice 2**

1- Résoudre $(P1)$ en utilisant le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 dans dans $[0,1]$ pour $h = 1/10$.
2- Donner une valeur approchés de $y(0.4)$ par le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, où $y$ est la solution de $(P1)$, sur $[0,1]$ avec le pas $h = 1/10$.
3- Comparer le résultat trouvé avec la valeur exacte de $y(0.4)$.

# Résolution.

**Exercice 1**

1- La formule d'Euler explicite est donnée par l'algorithme

$$\begin{cases} y_0 = y(0) = 1 \\ y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right) = y_i + h\left(x_i + y_i\right), i = 0, 1, \cdots, n-1, \end{cases}$$

où $n = \dfrac{b-a}{h} = 10$ et $y_i = y(x_i) = y(a+ih) = y\left(\dfrac{i}{10}\right), i = 0, 1, \cdots, 10$

Les $y_i, i = 0, 1, \cdots, 10$, sont donnés par le tableau suivant

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\dfrac{x_i + y_i}{10}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $0,1$ |
| 1 | $0,1$ | $1,1$ | $0,12$ |
| 2 | $0,2$ | $1,22$ | $0,142$ |
| 3 | $0,3$ | $1,362$ | $0,1662$ |
| 4 | $0,4$ | $1,5282$ | $0.,19282$ |
| 5 | $0,5$ | $1,72102$ | $0,222102$ |
| 6 | $0,6$ | $1,943122$ | $0,2542122$ |
| 7 | $0,7$ | $2,1974342$ | $0,28974242$ |
| 8 | $0,8$ | $2,48717762$ | $0,328717762$ |
| 9 | $0,9$ | $2,815895382$ | $0,3715895382$ |
| 10 | 1 | $3,1874849202$ | |

$$y_1 = y_0 + \frac{x_i + y_i}{10} = 1 + \frac{0+1}{10} = 1,1 \quad ,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{x_1 + y_1}{10} = 1,1 + \frac{0,1+1,1}{10} = 1,22 \quad ,$$

$$y_3 = y_2 + \frac{x_2 + y_2}{10} = 1,22 + \frac{0,2+1,22}{10} = 1,362 \quad ,$$

$$\vdots$$

Tableau -1-

La formule d'Euler améliorée est donnée par l'algorithme

$$\begin{cases} y_0 = y(0) = 1 \\ y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) = y_i + h\left[x_i + \dfrac{h}{2} + y_i + \dfrac{h}{2}(x_i + y_i)\right] \\ \qquad = y_i. + h(x_i + y_i) + \dfrac{h^2}{2}(x_i + y_i + 1) \end{cases}$$

Dans ce cas, les $y_i$ seront donnés par le tableau suivant

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $h\,(x_i+y_i)$ | $\frac{h^2}{2}(x_i+y_i+1)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $0,1$ | $0,01$ |
| 1 | $0,1$ | $1,11$ | $0,121$ | $0,01105$ |
| 2 | $0,2$ | $1,24205$ | $0,144205$ | $0,01221025$ |
| 3 | $0,3$ | $1,39846525$ | $0,169846525$ | $0,013492326$ |
| 4 | $0,4$ | $1,581804101$ | $0,19818041$ | $0,01490902$ |
| 5 | $0,5$ | $1,79489344$ | $0,229489344$ | $0,016474467$ |
| 6 | $0,6$ | $2,04085725$ | $0,264085725$ | $0,018204286$ |
| 7 | $0,7$ | $2,323147261$ | $0,302314726$ | $0,020115736$ |
| 8 | $0,8$ | $2,64557772$ | $0,344557772$ | $0,022227889$ |
| 9 | $0,9$ | $3,012363381$ | $0,391236338$ | $0,024561817$ |
| 10 | 1 | $3,428161536.$ | | |

Tableau -2-

2- L'équation $y' = y + x$ est une équation différentielle linéaire non homogène. On résoud d'abord l'équation homogène $y' = y$

$$\begin{aligned} y' &= y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Leftrightarrow \ln y = x + c \\ &\Leftrightarrow y = \exp(c + c) = C \exp x, \end{aligned}$$

où $c$ et $C$ sont des constantes.

Pour la résolution de l'équation non homogène, on utilise la méthode des variations des constantes, c'est-à-dire qu'on suppose que $C$ dépend de $x$ et dans ce cas on écrit $C = C(x)$. Par conséquent, la solution de $(P1)$ est de la forme $y(x) = C(x) \exp x$.

Pour déterminer la valeur de $C(x)$ on dérive $y$ puis on remplace dans l'équation non homogène, pour avoir

$$\begin{aligned} y'(x) &= C'(x) \exp x + C(x) \exp x = C'(x) \exp x + y = x + y * \\ &\Leftrightarrow C'(x) \exp x = x \Leftrightarrow C'(x) = x \exp(-x) \\ &\Leftrightarrow C(x) = \int x \exp(-x)\, dx. \end{aligned}$$

Calculant maintenant cette intégrale par parties, en posant $u = x$ et $dv = \exp(-x)\, dx$ alors $du = dx$ et $v = -\exp(-x)$, ce qui nous permet de dire que

$$\begin{aligned} C(x) &= \int x \exp(-x)\, dx = -x \exp(-x) + \int \exp(-x)\, dx = -x \exp x - \exp(-x) + A \\ &= -(x+1) \exp(-x) + A. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y(x) &= [-(x+1)\exp(-x)+A]\exp x \\ &= -(x+1)+A\exp x. \end{aligned}$$

Cette solution vérifie la condition initiale $y(0)=1$, alors

$$1 = y(0) = -1 + A \Leftrightarrow \boxed{A=2}.$$

Par conséquent la solution de $(P1)$ est $\approx$

$$\boxed{y(x) = -(x+1) + 2\exp x.}$$

3- $y(0.1) = 1,11034184$, alors l'erreur commise par le shcéma d'Euler explicite est

$$e(0.1) = |1,11034184 - 1,1| \approx 1,0342 \times 10^{-2}$$

et l'erreur commise par le shcéma d'Euler amélioré est

$$e_a(0.1) = |1,11034184 - 1,11| \approx 0,342 \times 10^{-3}.$$

$y(0.2) = 1,242805516$, alors l'erreur commise par le shcéma d'Euler explicite est

$$e(0.2) = |1,242805516 - 1,22| \approx 0,7555 \times 10^{-3}$$

et l'erreur commise par le shcéma d'Euler amélioré est

$$e_a(0.2) = |1,242805516 - 1,24205| \approx 0,10755 \times 10^{-1}.$$

$y(0.3) = 1,3997176152$,alors l'erreur commise par le shcéma d'Euler explicite est

$$e(0.3) = |1,3997176152 - 1,362| \approx 0,37718 \times 10^{-1}$$

et l'erreur commise par le shcéma d'Euler amélioré est

$$e_a(0.3) = |1,3997176152 - 1,39846525| \approx 0,12524 \times 10^{-2}.$$

$y(0.4) = 1,5836493952$,alors l'erreur commise par le shcéma d'Euler explicite est

$$e(0.4) = |1,5836493952 - 1,5282| \approx 0,55449 \times 10^{-1}$$

et l'erreur commise par le shcéma d'Euler amélioré est

$$e_a(0.4) = |1,5836493952 - 1,581804101| \approx 0,18453 \times 10^{-2}.$$

$y(0.5) = 1,7974425414$,alors l'erreur commise par le shcéma d'Euler explicite est

$$e(0.5) = |1,7974425414 - 1,72102| \approx 0,7642 \times 10^{-1}$$

et l'erreur commise par le shcéma d'Euler amélioré est

$$e_a(0.5) = |1,7974425414 - 1,79489344| \approx 0,2549 \times 10^{-2}.$$

$\cdots$ etc.

En calculant les erreurs des valeurs qui restent on peut dire que le formule d'Euler explicite est d'ordre 1 en $h = 1/10$, mais la formule d'Euler améliorée est d'ordre 2 en $h$, donc elle est plus précise.

**Exercice 2.** La formule de Runge-Kutta d'ordre 2 est donnée par l'algorithme suivant

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^*\right)\right], \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{i+1}^* = y_i + h(x_i + y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}(x_i + y_i) + \dfrac{h}{2}\left(x_{i+1} + y_{i+1}^*\right). \end{cases}$$

Dans ce cas les $y_i$ sont donnés par le tableau suivant

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $h(x_i + y_i)$ | $y_i^*$ | $\frac{h}{2}(x_{i+1} + y_{i+1}^*)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $0,1$ | | |
| $1$ | $0,1$ | $1,11$ | $0,121$ | $1,1$ | $0,06$ |
| $2$ | $0,2$ | $1,24205$ | $0,144205$ | $1.231$ | $0,07155$ |
| $3$ | $0,3$ | $1,39846525$ | $0,169846525$ | $1,386255$ | $0,08431275$ |
| $4$ | $0,4$ | $1,582113464$ | $0,19821135$ | $1,568311775$ | $0,098415589$ |
| $5$ | $0,5$ | $1,795235389$ | $0,22952354$ | $1,78032499$ | $0,1140162495$ |
| $6$ | $0,6$ | $2,04123510$ | $0,26412351$ | $2,024758928$ | $0,1312379464$ |
| $7$ | $0,7$ | $2,32356421$ | $0,30235642$ | $2,30534702$ | $0,150267351$ |
| $8$ | $0,8$ | $2,64603066$ | $0,34460307$ | $2,62592063$ | $0,17129603$ |
| $9$ | $0,9$ | $3,01286388$ | $0,39128639$ | $2,99063373$ | $0,19453169$ |
| $10$ | $1$ | $3,42871458.$ | | $3,40415027$ | $0,22020751$ |

Tableau -3-

2- Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 est donné par

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right], \end{cases}$$

alors on a l'algorithme

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ k_1 = h(x_i + y_i) \\ k_2 = h\left(x_i + \dfrac{h}{2} + y_i + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h\left(x_i + \dfrac{h}{2} + y_i + \dfrac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h\left(x_i + h + y_i + k_3\right) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{1}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]. \end{cases}$$

Les valeurs de $y_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$, sonnt donnés par le tableau suivant

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | $0,1$ | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| $y_i$ | 1 | $1,110341667$ | $1,24280514$ | $1,39971699$ | $1,58364847$ |
| $k_1 = h(x_i + y_i)$ | $0,1$ | $0,121034167$ | $0,144280514$ | $0,169971699$ | |
| $k_2 = h\left(x_i + y_i + \dfrac{h + k_1}{2}\right)$ | $0,11$ | $0,13208587$ | $0,15649454$ | $0,18347028$ | |
| $k_3 = h(\left(x_i + y_i + \dfrac{h + k_2}{2}\right)$ | $0,1105$ | $0,13263846$ | $0,15710524$ | $0,184145213$ | |
| $k_4 = h\left[x_i + y_i + h + k_3\right]$ | $0,12105$ | $0,14429801$ | $0,16999104$ | $0,19838622$ | |

Tableau -4-

Donc par le schéma R-K 4 $y(0.4) \approx 1,58364847$.

3- La valeur exacte est $y(0.4) = 1,5836493952$, alors l'erreur commise par cette formule pour $x = 0,4$ est

$$e_{R-K4}\ (0,4) = |1,5836493952 - 1,58364847| \leq 0,1 \times 10^{-5}.$$