TD N$^\circ$1 D'Analyse

Promotion: $1^{ère}$ST

Limites, continuité, dérivabilité

Exercice 1 *Soit* $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ *définie par* $f(x)=(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$. *Montrer que* f *est prolongeable par continuité en* 0.

Exercice 2 *Étudier la continuité et la dérivabilité en* $x=1$ *de la fonction :*

$$f\left(x\right)=\frac{\left|x\right|\sqrt{x^{2}-2x+1}}{x-1},\ \text{si } x\neq 1\quad;\quad f\left(1\right)=1.$$

Exercice 3 *Soient* a *et* b *deux nombres réels. On définit la fonction* $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *par*

$$f(x)=\left\{\begin{array}{c}\sqrt{x}\ \text{si } 0\leq x\leq 1\\ ax^{2}+bx+1\qquad \text{si } x>1.\end{array}\right. .$$

Déterminer a *et* b *tels que* f *soit dérivable sur* $(0,+\infty)$ *et dans ce cas calculer* $f'(1)$.

Exercice 4 *En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction* $f(x)=\sqrt{x}$ *, donner un majorant de l'erreur commise en écrivant* $\sqrt{123}\approx 11$.

Exercice 5 *Les conditions du théorème de Rolle sont -elles vérifiées par la fonction* $f\left(x\right)=\left|x\right|$ *sur l'intervalle* $[-1,1]$.

Exercice 6 *Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction*

$$f(x)=\alpha x^{2}+\beta x+\gamma$$

sur l'intervalle $[a,b]$ *préciser le nombre "*c*" de* $]a,b[$. *Donner une interprétation géométrique.*

Exercice 7 *En appliquant la règle de l'Hôpital, calculer les limites suivantes:*
1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$*; 2)* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cos x-\sin 2x}{x^3}$.