SERIE 1 $maths\,1$ **ALGEBRE**

Ex1: 1. Vérifier que $[n\ pair] \Leftrightarrow [n^2\ pair]$, et déduire que $[n\ impair] \Leftrightarrow [n^2\ impair]$.

2. Vérifier que lorsque, n est un entier naturel, le nombre $\frac{n\,(n^2+1)}{2}$ l'est aussi.

3. Vérifier par récurrence que : $\forall\, n \geq 1, \quad 2^n + 3^n \leq 5^n$.

Ex2: Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.

1. $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x \leq y$
2. $\exists y \in E \quad \forall x \in E \quad x \leq y$
3. $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x < y$
4. $\forall y \in E \quad \forall x \in E \quad x \leq y$

Ex3: Reprendre l'exercice précédent mais avec $E = \mathbb{R}$.

Ex4: Soient $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4,5\}, C = \{2,4\}$. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse. (Penser à justifier chaque réponse).

1. $\forall x \in A, x \in B$ **2.** $\exists x \in B,\ x \in A$ **3.** $\exists x \in A,\ x \notin B$ **4.** $\exists x \in B,\ x \notin A$
5. $\exists x \in B, \forall y \in A, \forall z \in C, y + z \leq 2x$.

Ex5: Montrer que : $\{x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 \leq x\} = [0,1]$.

Ex6: Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

$X = \bar{A} \cap (A \cup \bar{B})$, $\quad Y = A \cup (\overline{A \cup B})$, $\quad Z = \overline{A \cap B} \cap B$, $\quad T = A \cap \overline{A \cup B}$.

Ex7: Soient $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + x$ et $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Ex8: 1. Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto ln(1 + e^x)$ Montrer que f est bijective et expliciter f^{-1}.

2. Même travail avec $g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2 + x$. (**Supplémentaire**)

Ex9: On considère la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, $f(x) = x^2$. Déterminer

(a) Im (f) $\quad (b)$ $f[-1,\ 2]$ $\quad (c)$ $f^{-1}[1,\ 2]$.

Ex10: On cherche à déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f\big(x - f(y)\big) = 2 - x - y. \quad (E)$$

1. Prouver que , $f(0) = 1$. ($\boldsymbol{ind}.$ $Tester\ la\ relation\ (E)\ avec\ x = f(0)\ et\ y = 0$).
2. En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x - 1) = 2 - x$.
3. En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.