<u>Corrigé Exercice 1, 2, 3 – EXAM- INIA-2021-2022</u>

<u>Exercice 1</u> (Logique du premier ordre et syntaxe)
exo sur 4 points
Question 1
1 point Quand dit-on qu'une variable est libre dans une formule ?
Une variable est dite libre dans une formule si elle poss_ede au moins une occurrence libre.
Dans la suite de l'exercice, nous considérons le langage du premier ordre L = {R, S, f, a} ou R et S désignent deux symboles de relation respectivement unaire et binaire, f désigne un symbole de fonction unaire et a désigne un symbole de constante.
Soit F la formule suivante : ∀x, ∃y

(∀x∃yR(f(x), f(y))) ^ ((∀zR(x, z)) → S(x))
Question 2
Les variables x et y sont-elles libres dans la formule F ? Justifiez votre réponse en quelques mots.
1 point
x est libre dans la formule car il existe deux occurrences libres (les deuxième et troisième occurrences quand on lit la formule de gauche à droite. En revanche y est une variable liée car toutes ses occurrences (une seule) sont liées.
Question 3
Transformez la formule F précédente de manière à ce que variables liées et variables libres (éventuelles) ne portent pas le même nom.
1 point
On renomme les variables liées qui ont aussi une occurrence libre. Soit ici le x quantifié universellement. On ne renomme pas les variables libres, on changerait le sens de la formule.
(∀x∃yR(f(u), f(y))) ^ ((∀zR(x, z)) → S(x))

<u>Exercice 2 :</u>
Considérons deux personnes appelées Ali et Zora représentées par des constantes a et z, et le roman Germinal représenté par la constante g. En utilisant les prédicats
_ R(y) interprété par y est un roman
_ H(x) interprété par x est un être humain
_ E(x, y) interprété par x a écrit y
_ L(x, y) interprété par x a lu y
et le prédicat =,

Formaliser les énoncés suivants :
1. Ali a lu un roman ∃y(R(y) ^ L(a; y))
2. Ali a lu exactement deux romans
∃x∃y(R(x) ^ R(y) ^ L(a; x) ^ L(a; y) ^ ¬(x = y) ^ (∀z(R(z) ^ L(a; z))) z = x _ z = y))
3. Germinal a été écrit par Zora E(z; g)
4. Ali a lu tous les romans de Zora ∃y(R(y) ^ ¬L(a; y))
5. Ali n'a pas lu tous les romans ∃y(R(y) ^ ¬L(a; y))
6. Tout le monde a lu un roman de Zora
∀x(H(x)) (∃y(R(y) ^ E(z; y) ^ L(x; y)))))
7. Quelqu'un a lu tous les romans de Zora
∃x(H(x)= ∃y(R(y) ^ E(z; y)) L(x; y)))
8. Tous ceux qui ont écrit un roman ont lu Germinal
∀x(H(x) ^ ∃y(R(y) ^ E(x; y))) L(x; g))
9. Tous les romans n'ont pas été écrits par une même personne
¬(∃x(H(x) ^ ∀y(R(y)) E(x; y))))
10. Parmi les romans de Zora, Ali n'a lu que Germinal
∀y((R(y) ^ E(z; y) ^ L(a; y))) y = g)

Exercice3 :

Expliquer par des phrases en Français le sens de chacune des formules suivantes et dire si elles sont vérifiées dans le modèle des entiers :

(a) $\forall xy, (Pair(x) \wedge Pair(y)) \rightarrow Pair(x + y))$ $\forall x, \exists y$

(b) $\forall xy, \exists z\ (Div(x, z) \wedge Div(z, y))$

(a) La somme de deux entiers pairs est pair, ce qui est vrai dans le modèle des entiers. Exp 2+4 = 6

(b) Pour tout entiers x et u, il existe z tel que x divise z et z divise y. Cette propriété est fausse dans le modèle des entiers, en effet on aurait alors que x divise y et il suffit de prendre x = 2 et y = 3 et z= 5pour que la propriété soit fausse. Z : X =2,5 et y : z = 0,6 les résultats n'appartenant pas à l'ensemble des entiers.